

ΜΑΘΗΜΑ 11

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης
Συντομογραφία συνάρτησης

Θεωρία – Σχόλια – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (αυτό το $\mathbb{R}$ ας το πούμε $\mathbb{R}_1$)

Συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$ (αυτό το $\mathbb{R}$ ας το πούμε $\mathbb{R}_2$).

Σε αυτή την περίπτωση, το y συμβολίζεται και $f(x)$, δηλαδή είναι $y = f(x)$

Η ισότητα $y = f(x)$ λέγεται **τύπος** της συνάρτησης

Παρατήρηση

Σε κάθε συνάρτηση λειτουργούν δύο σύνολα $\mathbb{R}$.

Το $\mathbb{R}_1$ από το οποίο παίρνει τιμές το x και το $\mathbb{R}_2$ από το οποίο παίρνει τιμές το y .

2.

Πεδίο ορισμού

Στη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, το $A \subseteq \mathbb{R}_1$ λέγεται **πεδίο ορισμού** και συνήθως συμβολίζεται D_f .

3.

Η μεταβλητή x

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}_1$, άρα και τα στοιχεία του πεδίου ορισμού συμβολίζονται, συνήθως, με τη μεταβλητή x . (ανεξάρτητη μεταβλητή).

4.

Η μεταβλητή y

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}_2$ συμβολίζονται, συνήθως, με τη μεταβλητή y (εξαρτημένη μεταβλητή)

5.

Το σύνολο τιμών

Είναι το σύνολο εκείνων των $y \in \mathbb{R}_2$, τα οποία λειτουργούν στη συνάρτηση.

Συμβολίζεται $f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού

- **Μαθηματικός ορισμός του συνόλου τιμών:**

$$f(D_f) = \{y \text{ όπου } y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in D_f\}$$

6.

Για να είναι γνωστή μια συνάρτηση

Πρέπει να γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της $y = f(x)$

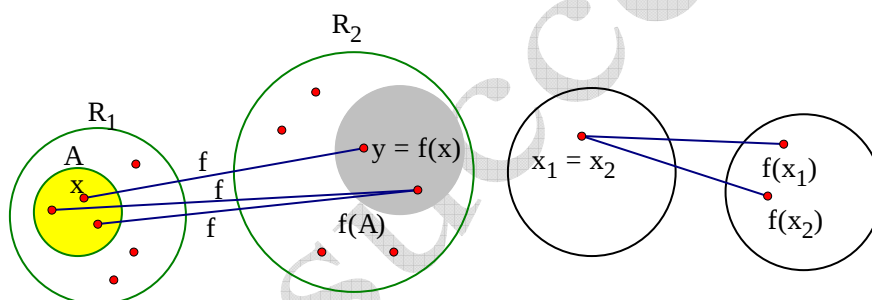
Όταν το πεδίο ορισμού της δεν δίνεται, πρέπει να το βρίσκουμε.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Βελοδιάγραμμα

Δείτε την παραπάνω θεωρία σχηματικά



Απαγορεύεται στη συνάρτηση.

2.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Όχι αντίστροφα.

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$. Όχι αντίστροφα.

3.

Μια παρατήρηση

Σε κάθε συνάρτηση, η μεταβολή του x αναγκάζει σε μεταβολή ή όχι του y .

4.

Εύρεση του πεδίου ορισμού

Όταν το πεδίο ορισμού δε δίνεται, πρέπει να το βρίσκουμε πριν από οποιαδήποτε άλλη ενέργεια, ακόμη κι' αν δε μας το ζητάνε.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού D_f :

i) Παρανομαστές $\neq 0$

ii) Υπόριζα μη αρνητικά

iii) Στην $\ln g(x)$ υποχρεώνουμε $g(x) > 0$

iv) Στην $\operatorname{εφ} g(x)$ υποχρεώνουμε $g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

v) Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι $D_f = \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

i) Η ισότητα $y = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ ορίζει συνάρτηση;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ii) Η ισότητα $y^2 = x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ ορίζει συνάρτηση;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση

i)

Ναι, ορίζει συνάρτηση, διότι καθένα $x \in \mathbb{R}$ το αντιστοιχίζει σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, στο $x^2 - 1$.

ii)

Η ισότητα $y^2 = x^2 + 2x + 1$ γράφεται

$$y^2 = (x + 1)^2$$

$$y = x + 1 \quad \text{ή} \quad y = -(x + 1)$$

Δες τον ορισμό
της συνάρτησης

Όχι, δεν ορίζει συνάρτηση, διότι καθένα $x \in \mathbb{R}$ το αντιστοιχίζει σε δύο $y \in \mathbb{R}$, στα $x + 1, -(x + 1)$

2.

Κάποιος απάντησε $f(x) = \frac{x(x-5)}{x-5} \Rightarrow f(x) = x$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Τι βαθμό του δίνεις με άριστα το 20;

Προτεινόμενη λύση

$$x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5. \quad \text{Άρα} \quad D_f = \mathbb{R} - \{5\}$$

Πριν από οποιαδήποτε
ενέργεια πρέπει να
βρίσκουμε το πεδίο
ορισμού

Καλύτερα να μην τον βαθμολογήσουμε.

3.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{e^x - 1}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $x - 1 > 0$ και $\ln(x - 1) \geq 0$ και $e^x - 1 \neq 0$

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad (1)$$

$$\ln(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) \geq \ln 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad (2)$$

$$e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow e^x \neq e^0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad (3)$$

Συναλήθευση των (1), (2), (3): $x \geq 2$ Άρα $D_f = [2, +\infty)$

4.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{1 - \ln x}}$.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $x > 0$ (1) και $1 - \ln x \neq 0$ και $\frac{\ln x}{1 - \ln x} \geq 0$

$$1 - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 1 \Leftrightarrow \ln x \neq \ln e \Leftrightarrow x \neq e \quad (2)$$

$$\frac{\ln x}{1 - \ln x} \geq 0 \quad \text{Θέτουμε } \ln x = w.$$

$$\text{Τότε } \frac{w}{1 - w} \geq 0 \Leftrightarrow w(1 - w) \geq 0 \quad \text{με } 1 - w \neq 0$$

$$\begin{aligned} w - w^2 &\geq 0 & \text{με } w &\neq 1 \\ w^2 - w &\leq 0 & \text{με } w &\neq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Ρίζες του τριωνύμου: 0, 1

Το τριώνυμο ετερόσημο του $\alpha = 1$

$$(3) \Leftrightarrow 0 \leq w \leq 1 \quad \text{με } w \neq 1$$

$$0 \leq w < 1$$

$$0 \leq \ln x \leq 1$$

$$\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$$

$$1 \leq x \leq e \quad (4)$$

Συναλήθευση των (1), (2), (3): $1 \leq x < e$. Άρα $D_f = [1, e)$

5.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{5x-10}}{1-\ln(x-2)}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $5x - 10 \geq 0$ και $1 - \ln(x - 2) \neq 0$ και $x - 2 > 0$

$$5x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x - 2) \neq 0 &\Leftrightarrow \ln(x - 2) \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x - 2) \neq \ln e \\ x - 2 &\neq e \Leftrightarrow x \neq e + 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \quad (3)$$

Συναλήθευση των (1), (2), (3) οπότε $D_f = (2, e + 2) \cup (2 + e, +\infty)$

6.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{Για το τυχαίο } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } x^2 + 1 > x^2 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \\ \sqrt{x^2 + 1} &> -x \\ x + \sqrt{x^2 + 1} &> 0 \end{aligned}$$

Άρα $D_f = \mathbb{R}$

7.

Έστω $z \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - |z|x + 1 - |z|^2}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $x^2 - |z|x + 1 - |z|^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$

$$|z|^2 - 4(1 - |z|^2) \leq 0$$

$$|z|^2 - 4 + 4|z|^2 \leq 0$$

$$5|z|^2 \leq 4$$

$$|z|^2 \leq \frac{4}{5}$$

$$|z| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8.

Αν $z \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3|z|x + |z|^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να βρείτε τον z .

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $2x^2 + 3|z|x + |z|^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$

$$9|z|^2 - 8|z|^2 \leq 0$$

$$|z|^2 \leq 0$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

9.

Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f , που να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και να ισχύει $f(x^2 - 4x + 3) = 5x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε κατάλληλες τιμές στο x , ώστε να φθάσουμε σε άτοπο.

Εδώ τις ρίζες 1 και 3 του τριωνύμου.

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow f(1^2 - 4 \cdot 1 + 3) = 5 \cdot 1 + 6 \Rightarrow f(0) = 11 \quad (1)$$

$$\text{Για } x=3 \Rightarrow f(3^2 - 4 \cdot 3 + 3) = 5 \cdot 3 + 6 \Rightarrow f(0) = 21. \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε $11 = 21$. άτοπο

Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση

10.

Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f , που να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και να ισχύει $f(x^2 - 4x + 5) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Εργαζόμαστε όπως στην άσκηση 9.

11.

Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f , που να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και να ισχύει $f(x-1) + f(3-x) = x+5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη Θέτουμε όπου x το 1 και όπου x το 3.

12.

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f(-x+1) = 3x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

Προτεινόμενη λύση

Όπου $-x+1$ θέτουμε u , δηλαδή $-x+1 = u$, οπότε $x = 1-u$.

Η υπόθεση $f(-x+1) = 3x^2 + 2$ γίνεται

$$f(u) = 3(1-u)^2 + 2$$

$$f(u) = 3(1 - 2u + u^2) + 2$$

$$f(u) = 3 - 6u + 3u^2 + 2$$

$$f(u) = 3u^2 - 6u + 5$$

$$\text{Άρα } f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

13.

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f(x-2) = x^2 - x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

Υπόδειξη Ακολουθήσε την άσκηση 12

14.

Να βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 3f(-x) = 5x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Στην υπόθεση $2f(x) - 3f(-x) = 5x - 1$ **(1)** όπου x θέτουμε $-x$

$$2f(-x) - 3f(x) = -5x - 1$$

$$-3f(x) + 2f(-x) = -5x - 1$$
 (2)

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2) με αγνώστους $f(x)$, $f(-x)$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$D_{f(x)} = \begin{vmatrix} 5x-1 & -3 \\ -5x-1 & 2 \end{vmatrix} = 10x - 2 - 15x - 3 = -5x - 5$$

$$D_{f(-x)} = \begin{vmatrix} 2 & 5x-1 \\ -3 & -5x-1 \end{vmatrix} = -10x - 2 + 15x - 3 = 5x - 5$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{D_x}{D} = \frac{-5x-5}{-5} = x + 1$$

15.

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$,

να βρείτε τον τύπο της f .

Υπόδειξη.

Όπου x θέτουμε $\frac{1}{x}$ και ακολουθούμε την άσκηση 14.

16.

Να βρεθεί ο τύπος συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $2f(x) - f(-x) = e^x + e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η f είναι άρτια.

Υπόδειξη.

Ακολουθούμε την άσκηση 14 και βρίσκουμε

$$f(x) = \frac{3}{5}(e^x + e^{-x}), \quad f(-x) = \frac{3}{5}(e^x + e^{-x})$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι άρτια.

17.

Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ και τη συνάρτηση f δίνεται ότι

$$|z|f(x-2) + |w|f(3-x) = 3(x^2 + 1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0,15)$ και $B(1,-5)$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z και της εικόνας του w .

Προτεινόμενη λύση

Για $x-2=0$ δηλαδή $x=2$, η υπόθεση $\Rightarrow |z|f(0) + |w|f(1) = 3(2^2 + 1) = 3 \cdot 5 = 15$

Όπου $x-2$ θέτουμε
την τετμημένη του A

$$|z|f(0) + |w|f(1) = 15$$

αλλά $f(0) = 15$ και $f(1) = -5$, οπότε $15|z| - 5|w| = 15$

$$3|z| - |w| = 3 \quad (1)$$

Για $x-2=1$ δηλαδή $x=3$, η υπόθεση $\Rightarrow |z|f(1) + |w|f(0) = 3(3^2 + 1) = 3 \cdot 10 = 30$

Όπου $x-2$ θέτουμε
την τετμημένη του B

$$|z|f(1) + |w|f(0) = 30$$

$$-5|z| + 15|w| = 30$$

$$-|z| + 3|w| = 6 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (2), (1) και βρίσκουμε $|z| = \frac{15}{8}$, $|w| = \frac{21}{8}$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\frac{15}{8}$ και της εικόνας του w με ακτίνα $\frac{21}{8}$.

18.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $x + y \leq f(x) + f(y) \leq f(x + y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

i) η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ii) η f είναι περιττή.

Προτεινόμενη λύση

i)

Για $x = y = 0$, η υπόθεση δίνει $0 + 0 \leq f(0) + f(0) \leq f(0 + 0) \Rightarrow$

Όπου x θέτουμε την τετμημένη του O

$$0 \leq 2f(0) \leq f(0)$$

$$0 \leq 2f(0) \quad \text{και} \quad 2f(0) \leq f(0)$$

$$0 \leq f(0) \quad \text{και} \quad 2f(0) - f(0) \leq 0$$

$$0 \leq f(0) \quad \text{και} \quad f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Άρα η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ii)

Στην υπόθεση, όπου y θέτουμε $-x$, οπότε

$$x + (-x) \leq f(x) + f(-x) \leq f(x - x) \Rightarrow$$

$$0 \leq f(x) + f(-x) \leq f(0)$$

$$0 \leq f(x) + f(-x) \leq 0$$

$$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x), \text{ άρα } f \text{ περιττή.}$$

Αφού πρόκειται για περιττή, χρησιμοποιούμε x και $-x$

19.

Για συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στη C_f και να βρείτε τον τύπο της f .

Προτεινόμενη λύση

Για $x = e$, η υπόθεση δίνει $f\left(\frac{e}{e}\right) \leq \ln e \leq f(e) - 1$

$$f(1) \leq 1 \leq f(e) - 1$$

$$f(1) \leq 1 \quad (1)$$

Για $x = 1$, η υπόθεση δίνει $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq \ln 1 \leq f(1) - 1$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) \leq 0 \leq f(1) - 1$$

$$0 \leq f(1) - 1$$

$$1 \leq f(1) \quad (2)$$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow f(1) = 1$, άρα το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στη C_f .

Στην υπόθεση, όπου $\frac{x}{e}$ θέτουμε u , επομένως $x = eu$.

Οπότε $f(u) \leq \ln(eu) \leq f(eu) - 1$

$$f(u) \leq \ln e + \ln u$$

$$f(u) \leq 1 + \ln u$$

$$f(x) \leq 1 + \ln x \quad (3)$$

Από την υπόθεση έχουμε $\ln x \leq f(x) - 1 \Rightarrow f(x) \geq \ln x + 1 \quad (4)$

Από τις (3), (4) $\Rightarrow f(x) = \ln x + 1$

Παίζουμε με τιμές του x , που υποψιαζόμαστε ότι μας εξυπηρετούν

Δημιουργούμε το $f(x)$ και από δεύτερη πηγή

20.

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι

i) $f(1) = 0$

ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

iii) $f(x^v) = vf(x)$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

Προτεινόμενη λύση

i)

Για $x = y = 1$, η υπόθεση δίνει $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

$$f(1) = 0$$

ii)

Στην υπόθεση, όπου y θέτουμε $\frac{1}{x}$:

$$f\left(x \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

iii)

Για $v = 1$ προφανώς ισχύει: $f(x) = 1 \cdot f(x)$

Έστω ότι ισχύει για $v = k$: $f(x^k) = k f(x)$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $v = k + 1$ δηλαδή ότι $f(x^{k+1}) = (k + 1)f(x)$

$$\text{Είναι } f(x^{k+1}) = f(x^k \cdot x)$$

$$= f(x^k) + f(x)$$

$$= k f(x) + f(x) = (k + 1)f(x)$$